مقدمه در علم قبیل

مقدمہ در علم قبیل

مصنف: حذیفہ

حقوق محفوظ ہیں

Attribution 4.0 International
(CC BY 4.0)

مزید کتابوں کے لیے:

https://archive.org/details/@huzaifah_masood

مقدمہ

یہ مقدمہ علم قبیل میں ہے جو ایک صناعت نظری ہے جو امور ریاضی کو طالب کے ذہن میں مرتب کرنے کے لیے وضع کیا گیا ہے، تا کہ ان کی آپسی نسبت یعنی تساوی، تباین، عموم و خصوص وغیرہ اس کو واضح طور پہ معلوم ہو جائیں۔

اس کتاب کو شروع کرنے سے قبل ہم یہ تنبیہ کرتے ہیں کہ طالب یہ کتاب شروع کرنے سے قبل زبان رسمی کا مطالعہ کر لے، و منطق نقوشی کا فہم حاصل کر لے، پھر آگے بڑھے۔

جاننا چاہیے کہ تعلیم میں اصل چیز معانی ہوتے ہیں جن پہ لفظ و کتابت دلالت کرتے ہیں۔ انہیں معانی کو مخاطب کے ذہن میں قائم کرنا تعلیم کا مقصد ہوتا ہے۔ لیکن کبھی لفظ سے لفظ ہی مراد لیا جاتا ہے جیسے ب بول کے ہم حرف ب ہی مراد لیتے ہیں، لیکن اگر اسے کسی شخص کا نام بنا دیا جائے تو اب اس سے مراد وہ شخص ہوگا جس کا نام رکھا گیا ہے جیسے لفظ زید سے وہ مراد ہوتا ہے جس کا وہ نام ہے۔ و اگر زید و انسان جیسے لفظ سے لفظ ہی مراد لینا ہو تو اس کتاب میں ہم اسے کاماۓ مقلوب میں تحریر کریں گے جیسے "زید" و "انسان"، تاکہ واضح ہو جائے کہ وہاں ان سے کوئی معنی مراد نہیں ہے بلکہ خود لفظ مراد ہے۔

قبیل

جان لو کہ اشیاء کے مجموعہ کو ہم **قبیل** کہیں گے، و جو اس میں ہو اس کو **فرد** کہیں گے۔ و کہ سکتے ہیں کہ "قبیل" بدل ہے "کلی" سے، وجہ اس کی یہ ہے کہ یہاں ہمیں استغراق کا معنی چاہیے ہے نہ کہ ماہیت کا، و کہا جاتا کہ "یہ لفظ از قبیل صحیح ہے"، و ایسے ہی تیرا قول "هذا من قبیل البرهان"۔ مثال کے طور پہ "انسان" سے مراد ایک قبیل ہے، و زید، عمرو، بکر وغیرہ اس کے افراد ہیں۔ و ایسے ہی عدد طبیعی ایک قبیل ہے جس کے افراد 1 سے غیر نہایہ تک ہیں۔

سنوں اس کتاب میں ہم تمام قبائل کو عام طور پہ، بعد والے حرف سے متصل ہونے والے **حروف سالم** سے، تعبیر کریں گے جیسے ب، ج، ت، ش، م وغیرہ؛ نہ کہ د، ر وغیرہ۔ و فرد اگر معین ہو تو اس کو **نقطہ والے حروف مکسور** سے تعبیر کریں گے جیسے ﺑ، ﺟ، ﺷ؛ و اگر غیر معین ہو تو **بے نقطہ حروف مکسور** سے جیسے ﺣ، ﺳ، ﻣ وغیرہ؛ و بے نقطہ حرف مکسور کا حکم یہ ہے کہ اس میں ہم کوئی بھی معنئ معین نازل کر سکتے، بشرط کہ وہ حرف کسی سور سے مقیَّد نہ ہو۔ و جب کسی چیز کا مستقل عَلَم وضع کریں گے تو ہمیشہ ایک سے زیادہ حروف استعمال کریں جیسے عدد طبیعی کے لیے عط، و اسے صَعْلَمْ کے مثل پڑھیں گے یعنی عَطْ۔

تعریفِ قبیل

جاننا چاہیے کہ قبیل کی تعریف کے دو طُرق ہیں تعریف بالشمول و بالحد۔ و "حد" ایک لفظِ مشترک ہے جس کے متعدد مختلف معانی ہیں، و یہاں اس سے تعریف کی ایک قسم مراد ہے۔ ویسے تو حد کی حقیقت واجبِ بیان ہے، لیکن ریاضی میں اس کا جامع و مانع ہونا کافی ہے، و جامع سے مراد ہے کہ وہ اپنے تمام افراد کو جمع کرے و مانع سے مراد ہے کہ وہ اپنے افراد کے غیر کو جمع نہ کرے جیسے انسان کی حد میں ارسطو کا قول "وہ عقل والا حیوان ہے" تو اس کے معنی میں سارے انساں شامل ہو گئے و سارے غیر انسان اس سے خارج ہو گئے۔

تعریف بالشمول سے مراد ہے قبیل کے ہر ہر فرد کو شمار کرنا، جیسے تچھے 1 سے 4 تک کے قبیل کی تعریف کرنا ہے تو تو تحریر کرے گا کہ {1، 2، 3، 4}، و ہم اسے پڑھیں گے "قبیلِ متضمِّن ایک، دو، تین، چار" یعنی "قبیل جو ضمن میں لیے ہے 1، 2، 3، 4 کو"۔ و چونکہ ایک قبیل کو بار بار استعمال کیا جاتا ہے، لیکن اسے بار بار تحریر کرنا دشوار ہے خاص طور سے تب جب قبیل کے افراد کثیر ہوں، لہذا ہم اس کے لیے اسم وضع کرتے ہیں تاکہ ہر مرتبہ اس کی پوری تعریف تحریر نہ کرنا پڑے جیسے ب := {1، 2، 3، 4}۔ اس میں ہم نے {1، 2، 3، 4} کو ب کا مدلول بنا دیا۔ لیکن اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ ہمیشہ ب کا یہی معنی ہوگا، بلکہ خالص اس مسئلہ میں ہوگا جس میں ہم نے وضع کیا ہے۔

و معلوم ہونا چاہیے کہ جس قبیل میں ایک ہی فرد ہو اس کو ہم **موحَّد** کہیں گے جیسے {2}، و جس میں دو افراد ہوں اس کو **مثنّٰی** جیسے {7، 5}۔

و جاننا چاہیے کہ **کولن تساوی** یعنی ⌝ := ⌜ کو ہم اس کتاب میں وضع کے لیے استعمال کریں گے یعنی اس کے پہلے والی عبارت کو، اس کے بعد والی عبارت کے مدلول پہ دال بنانے کے لیے؛ تو پہلے والی کا معنی وہی ہو جائے گا جو بعد والی کا ہے۔ و علامات ⌝ ⌜ کو **کونا** کہتے ہیں جس کو ہم اس کتاب میں توضیح کے لیے استعمال کریں گے۔

و واضح رہے کہ ⌜{ }⌝ یعنی اقواس سے قبیل مراد ہوتا ہے کہ جو اس کے اندر ہوگا وہ اس کا فرد ہوگا جیسے مثال مذکور میں 1، 2، 3، 4 افراد ہیں۔ و قبیل کا فرد ہونے کو علامتِ **فردیت** یعنی ⌜∈⌝ سے تعبیر کیا جاتا ہے جیسے 1∈{1، 2، 3}، و ایسے ہی 2∈{1، 2، 3}۔ و جو قبیل کا فرد نہ ہو اس کی تعبیر کے لیے تو تحریر کرے گا مثلاً 4∉{1، 2، 3}۔ و ⌜∉⌝ کو **سلبِ فردیت** کی علامت کہا جا سکتا ہے۔

خیر جب ہم نے قبیل کے لیے نام وضع کر لیا تو اس کو قبیل کے مقام پہ استعمال کر سکتے ہیں جیسے ب =: {1، 2، 3} تو ہوگا 1∈ب و اس کا ترجمہ ہوگا کہ "1 ب کا فرد ہے" یا "1 ب میں داخل ہے"، و 5∉ب و اس کا ترجمہ ہوگا کہ "5 ب کا فرد نہیں ہے" یا "5 ب میں داخل نہیں ہے"۔ و ہم ان دونوں کو اس کتاب میں اختصاراً پڑھیں گے کہ "1 داخل ب" و "5 نا داخل ب" وغیرہ۔ و 1∈ب، 2∈ب و 3∈ب وغیرہ کو ایک ساتھ 1، 2، 3∈ب تحریر کیا جاتا ہے۔

و ⌜=⌝ علامت **تساوی** ہے جس کا مطلب ہے کہ اس کے دونوں جانب کا مدلول متساوی ہے یعنی ایک ہی ہے جیسے

ب =: {1، 2، 3}

ج =: {1، 2، 3} تو ہوا ب=ج

و ض =: {1، 2} تو ہوا ب≠ض

و فرق ⌜=:⌝ و ⌜=⌝ میں یہ ہے کہ اگر ب سے مراد {1، 2، 3} ہے

تو عبارت ب={1} پہ کاذب ہونے کا حکم لگے گا۔

جبکہ ب=:{1} سے ب کی مراد تبدیل ہو کے {1} ہو جائے گی، یعنی اب ب={1} صادق ہوگا۔

و عام طور سے جب ہم ⌜=⌝ استعمال کرتے ہیں تو اس کے ضمن میں، اس سے پہلے، ⌜=:⌝ کے مقدر ہونے کی تصدیق ہو جاتی ہے کیونکہ کوئی بھی عبارت اس طور پہ تعبیر کی جاتی ہے کہ وہ صادق ہے مثلاً ب = {ہ، ج، ﺶ}۔ تو جب یہ عبارت صادق ہے تو اس کا مطلب ہے کہ ب کو پہلے ہی {ہ، ج، ﺶ} پہ دال بنایا جا چکا ہے، بس تحریر نہیں کیا گیا۔

بہر حال خوب سمجھ لو کہ ایک قبیل میں ایک فرد ایک مرتبہ سے زیادہ نہیں آ سکتا، گر چہ تحریر میں ہم اسے کتنے ہی مرتبہ دوہرا دیں۔

لہٰذا ب =: {1، 1، 1، 2، 3، 3} و ج =: {1، 2، 3} تو ہوا ب=ج

و ایسے ہی ان دونوں کا طول بھی متساوی ہوگا، و **طولِ قبیل** اس کے افراد کی تعداد کو کہتے ہیں، و اس کی تعبیر کے لیے قبیل کے اسم کو دو عمود کے درمیان تحریر کرتے ہیں جیسے |ب|۔

تو ہوا |ب| = |ج| = 3

و طول لا متناہی بھی ہو سکتا ہے جیسے عدد طبیعی کا طول کہ |عط| = ∞

و ⌝ ∞ ⌜ **غیر نہایہ** کی علامت۔

بہر حال اگر دو قبائل کا طول متساوی ہو تو ہم اسے **متساوئے طول** کہیں گے و اسے ⌝ ≈ ⌜ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے اگر |ب| = |ج| تو ب≈ج۔

خیر کبھی افراد کو حقیقتاً شمار کرنا دشوار ہو جاتا ہے تب ہم اسے حکماً شمار کرتے ہیں جیسے 1 سے 100 تک کا قبیل بنانا ہو تو تو تحریر کرے گا کہ {1، 2، 3، ...، 100}۔ یہاں 1 سے 100 کے اعداد تحریر کیے جا سکتے تھے لیکن اس میں بڑی دشواری تھی تو ہم نے اسے حکماً شمار کیا۔ و ⌝ ... ⌜ کو ہم **علامت تسلسل** کہیں گے، و اس کا معنی ہے کہ اگر اس کے پہلے والے افراد کسی ترتیب پہ مرتب ہیں تو وہ ترتیب آگے بھی جاری رہے گی، و اس کی غایت وہ ہے جو اس کے بعد آئے جیسے {1، 2، 3، ...، 10، 20، 30، ...، 100}۔ یہ ایک قبیل ہے جس میں

1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 20، 30، 40، 50، 60، 70، 80، 90، 100 داخل ہیں۔ اس میں پہلے تسلسل کی غایت 10 ہے و دوسرے کی 100۔

کبھی افراد کو حقیقتاً شمار کرنا دشوار ہی نہیں بلکہ مستحیل ہوتا ہے، و تب بھی طریقۂ مذکور استعمال کیا جا سکتا ہے جیسے تمام اعداد طبیعی کو شمار کرنا ہو تو تحریر کریں گے کہ {1، 2، 3، ...}۔ اس میں ہم نے تسلسل کی کوئی غایت ذکر نہیں کیا ہے، لہذا یہ غیر نہایہ

تک جاری رہے گا یعنی تمام اعداد طبیعی اس میں شامل ہو گئے۔ و ایسے ہی عدد صحیح کی تعریف میں {...، -3، -2، -1، 0، 1، 2، 3، ...}۔ یہ دونوں جانب یعنی ایجاب و سلب میں غیر نہایہ تک جاری رہے گا تو اس نے تمام اعداد صحیح کا استغراق کر لیا۔

و یہاں یہ بھی ذکر کرتے چلیں کہ تمام غیر نہایہ برابر نہیں ہوتیں جیسے عط و ایجابی عم یعنی ایجابی عدد معقول، دونوں کے طول غیر متناہی ہیں لیکن متساوی نہیں ہیں کہ
عط = {1، 2، 3، ...} و عم = {0، 0ر1، 0ر2، ...، 1، 1ر1، 1ر2، ...، 2، 2ر1، 2ر2}

توضیح: ⌜ر⌝ سے مری مراد عکسی اعشاریہ ہے مثلا "دو اعشاریہ ایک" یعنی 2.1 کے لیے 1ر2، و 4.9 کے لیے 9ر4۔

خیر شمولیت کا طریقہ دلچسپ ہے، لیکن ہر جگہ کارساز نہیں ہے جیسے اگر تمام ایجابی عددِ اولی کی تعریف کرنا ہو تو ہم انہیں شمار نہیں کر سکتے کیونکہ ان کی کوئی ترتیب نہیں ہے۔ بلکہ تب ہم **حد** بیان کریں گے، و علم قبیل میں حد **زبان حملی** میں تعبیر کی جاتی ہے تو تو تحریر کرے گا کہ
عل := {ح | ح∈عط ∧ ∀س∈عط(ح\س∈عط ← (س=1 ∨ س=ح))}

اس میں دو اجزاء ہیں جو ⌜|⌝ سے جدا ہیں، اس کے داہنے جانب ح ہے جس سے موجودات کا غیر معین فرد مراد ہے۔ و بائیں جانب شرط ہے کہ جو چیز اس کو تمام کرے گی وہی حد میں داخل ہوگی و جو تمام نہ کرے گی وہ حد میں داخل نہ ہوگی۔ و ح∈عط شرط کا پہلا جز ہے جس کا معنی ہے کہ ح ایک عدد طبیعی ہو، و ∀س∈عط سے عدد طبیعی کے تمام افراد مراد ہیں، و ح\س∈عط مقدم ہے و (س=1 ∨ س=ح) تالی ہے جس کا ترجمہ ہوا کہ "اگر ح کو س سے تقسیم کرنے پہ عدد طبیعی آیا ہے، تو س 1 یا ح کے متساوی ہے"۔

اب اگر تو غور کرے گا تو جان لے گا کہ 7 نے اس شرط کو تمام کیا، لیکن 9 نے نہیں۔ کیونکہ جب بھی 7 پہ مقدم صادق ہوگا تو تالی بھی صادق ہوگا۔ لیکن 9 پہ جب س=3 ہو تو مقدم صادق ہوگا و تالی کاذب ہوگا لہٰذا شرط تمام نہ ہوگی۔ خوب غور کر کے سمچھ لو۔

و جو لوگ ایک کو عدد اولی نہیں مانتے ان کے نزدیک تعریف ہوگی۔

عل := {ح | ح∈عط ∧ ح>1 ∧ ∀س∈عط(ح\س∈عط ←(س=1 ∨ س=ح))}

خیر، جاننا چاہیے کہ بعض قبیل ایسے بھی ہیں جن کی تعریف دونوں طرح کی جا سکتا ہے

مثلاً

ب := {2، 4، 6، ...}

ج := {ح | ح∈عط ∧ Eس∈عط(ح = س×2)}

تو ب=ج

بہر حال کبھی قبیل کا فرد بھی قبیل ہوتا ہے جیسے

ب := {{1، 2}، 3، 4}

تو {1، 2}∈ب، جب کہ 1∉ب، و 1، 2∉ب۔ و اس صورت میں وہ جزئی کی قوت میں ہوتا ہے

یعنی اسے حروف مکسور سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ خوب غور کر کے سمجھ لو۔

قبیل عالی

اب جاننا چاہیے کہ وہ قبیل کہ ہر چیز جس کا فرد ہو اس کو ہم **قبیلِ عالی** کہیں گے و ⌜ھ⌝ سے تعبیر کریں گے۔ و ہر چیز سے مراد ہے تمام اشیائے ریاضی جیسے 1، 2، 3، 5\2، 6\14 وغیرہ؛ و ان سے بنے ہوئے تمام قبیل جیسے {1، 2}، {2، 3}، {1، 3}، {1، 2، 3، ...} وغیرہ۔ تو اس کی حد میں ہمیں ایسی شرط لگانا ہے جو تمام چیزوں میں پائی جائے۔ تو اس کی حد ہوئی ھ = {ح | ح=ح}

یعنی ھ وہ قبیل ہے جس میں وہ چیزیں داخل ہیں جو خود کے مثل ہوں، و ہر چیز خود کے مثل ہوتی ہے تو ہر چیز ھ کا فرد ہو گئی۔ لیکن ھ یعنی قبیل عالی، بھی تو خود کے مثل ہے تو وہ بھی حد کو تمام کرے گا یعنی وہ خود کا فرد ہو گیا، جب کہ یہ مستحیل ہے۔

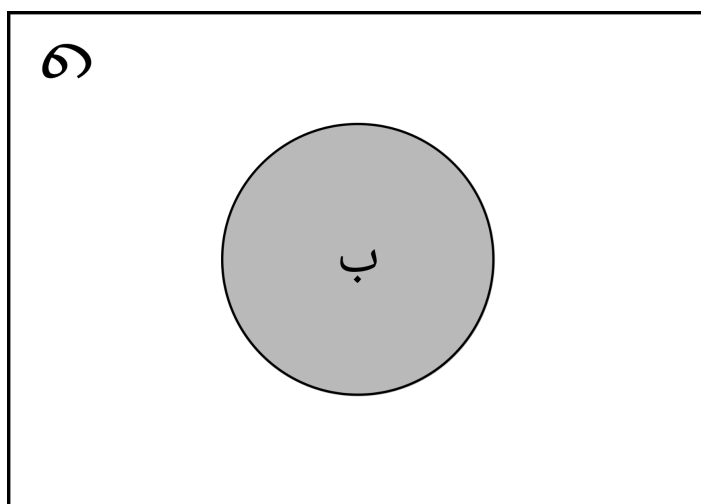
واضح رہے کہ یہ استحالہ قبیلِ عالی کے وجود سے مانع نہیں ہیں، بلکہ اس کی تعریف سے مانع ہیں۔ و اس کی وجہ یہ ہے کہ تعریف دو طرح سے ہوتی ہے

- پہلا عام سے خاص کی تعریف، و وہ یہ ہے کہ ہم معلوماتِ عام سے مطلوب کے غیر کو جدا کرتے ہیں تو جو باقی رہتا ہے وہ مطلوب ہوتا ہے۔
- دوسرا خاص سے عام کی تعریف، و وہ یہ ہے کہ ہم تمام معلوماتِ خاص کو جمع کرتے ہیں تو جو حاصل ہوتا ہے وہ مطلوب ہوتا ہے جو ان میں سے ہر ایک سے عام ہوتا ہے۔

و چونکہ قبیل عالی سے عام کچھ نہیں ہے لہذا پہلے طریقہ سے اس کی تعریف نہیں کی جا سکتی؛ و اس کے افراد غیر متناہی ہیں کہ انہیں شمار نہیں کیا جا سکتا، لہذا دوسرے طریقہ سے بھی اس کی تعریف نہیں کی جا سکتی۔

بہر حال افراد مبہم کا حصر کر کے ہم مذکورہ استحالہ کو دفع کر سکتے ہیں مثلا قبیل عالی کی حد میں تو تحریر کرے گا ق =: {ح∋ھ | ح∌ح}

تو اب اس میں ح سے خالص وہی افراد مراد ہوں گے جو قبیل عالی میں داخل ہیں، اب وہ استحالہ لازم نہ آ سکے گا یعنی قبیل عالی خود میں داخل نہ ہو سکے گا، لیکن اب بھی قبیل عالی کی تعریف ممکن نہ ہوگی کیونکہ مذکورہ حد کا معنی ہے کہ "ق وہ قبیل ہے جس میں ہر وہ چیز داخل ہے جو ၈ میں داخل ہے" یعنی ၈ کا ہر فرد ق میں داخل ہو گیا تو ہوا ق = ၈، اس کا معنی ہوا کہ "ق" و "၈" ایک ہی قبیل کے مختلف نام ہیں، یعنی سوال وہیں کا وہیں باقی رہا کہ قبیل عالی کی حد کیا ہے؟

بہر حال اس علم میں جب ہم "قبیل عالی" بولیں گے تو اس سے ایسا قبیل مراد ہوگا جس میں ہماری بحث میں موجود تمام اشیاء داخل ہوں۔ و **رسمۂ وین** میں اس کو مربّع سے تعبیر کرتے ہیں و اس کے علاوہ دیگر قبائل کو دائرہ سے جیسے رسمۂ 1 میں ہے۔

رسمۂ 1

واضح رہے کہ جس قبیل میں کوئی فرد نہیں ہوتا اس کو **قبیل خالی** کہا جاتا ہے جیسے ب =: { }، و اس کی تعبیر کے لیے ایک مخصوص علامت ہے و وہ ہے "∅"، لہذا ب = ∅۔ و قبیل خالی کی حد ہے کہ ∅ = {ح | ح≠ح}

یعنی اس میں ہر وہ چیز داخل ہے جو خود کے مثل نہ ہو، و کوئی بھی چیز ایسی نہیں ہے جو خود کے مثل نہ ہو، لہذا اس میں کچھ بھی داخل نہیں ہے۔

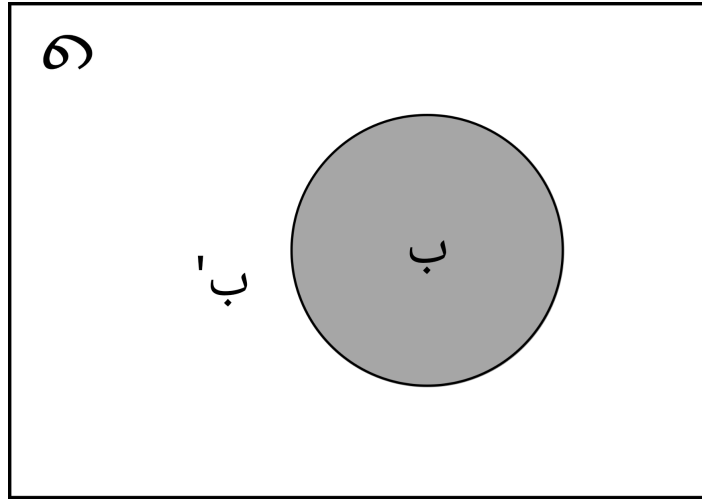
و جاننا چاہیے کہ $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ کیونکہ $\{\ \} \neq \{\{\ \}\}$۔ پہلے کا معنی ہے قبیلِ خالی، جب کہ دوسرے کا معنی ہے ایک ایسا قبیل جس میں ایک قبیلِ خالی داخل ہے۔

واضح رہے کہ رسمہ دلیل نہیں ہوتا، بلکہ خالص تفہیم کی غرض سے مرسوم کیا جاتا ہے۔

نقیضِ قبیل

جاننا چاہیے کہ ہر قبیل کی ایک نقیض ہوتی ہے جس میں اس قبیل کے افراد کے علاوہ کے تمام افراد شامل ہوتے ہیں و اسے تنہاں کامائے مقلوب یعنی ⌜'⌝ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے ب' و اسے "نا ب" پڑھیں گے۔

و اس کی حد ہے ب' := {ح|ح∌ب}

و رسمۂ ویں میں اس کی تعبیر ہوگی جیسے رسمۂ 2 میں ہے۔

رسمۂ 2

اس میں ب و ب' میں سے ہر ایک دوسرے کی نقیض ہے کیونکہ جو افراد ب میں ہیں وہ ب' میں نہیں ہیں، و جو ب' میں ہیں وہ ب میں نہیں ہیں۔ و یہیں سے معلوم ہوا کہ ب' کی نقیض یعنی ب" متساوی ہے ب کے، یعنی ب"=ب۔

و ایسے ہی ∅ کی نقیض ہے ∅' ۔

و ∅' = ര

و ര' = ∅

و ∅' کو ہم "نا خالی" پڑھیں گے۔ و جب ہم "غیرِ خالی قبیل" بولیں گے تو اس سے مراد ایسا قبیل ہوگا جو خالی نہ ہو یعنی کم از کم اس میں ایک فرد ہو یعنی ب ≠ ∅۔

اقسام قبیل

جاننا چاہیے کہ کسی دوسرے قبیل کے جانب نسبت کے اعتبار سے، ایک قبیل کی چھے اقسام ہوتی ہیں خاص متساوی، عام متساوی، متساوی، خاص، عام و متباین۔

اگر کسی قبیل کا ہر فرد دوسرے میں داخل ہو تو اس کو **خاص متساوی** کہیں گے، و جس میں داخل ہے اس کو **عام متساوی** کہیں گے۔ و اس کو علامت ⌜⊆⌝ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے

ب := {1، 2، 3}

ج := {1، 2، 3}

ض := {1، 2، 3، 4، 5}

تو ہوگا ب⊆ج و ب⊆ض۔

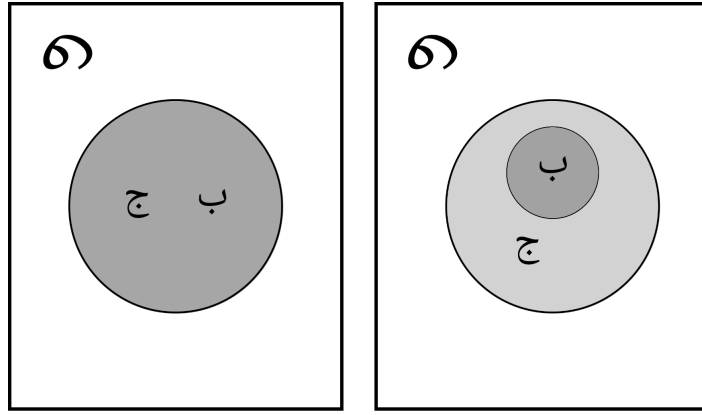
و ترجمہ ہوگا "ب خاص یا متساوی ہے ج کے"، و ایسے ہی "ب خاص یا متساوی ہے ض کے"۔

و ب⊆ج = ج⊇ب، تساوی کے بائیں والے کا ترجمہ ہوگا "ج عام یا متساوی ہے ب کے"۔

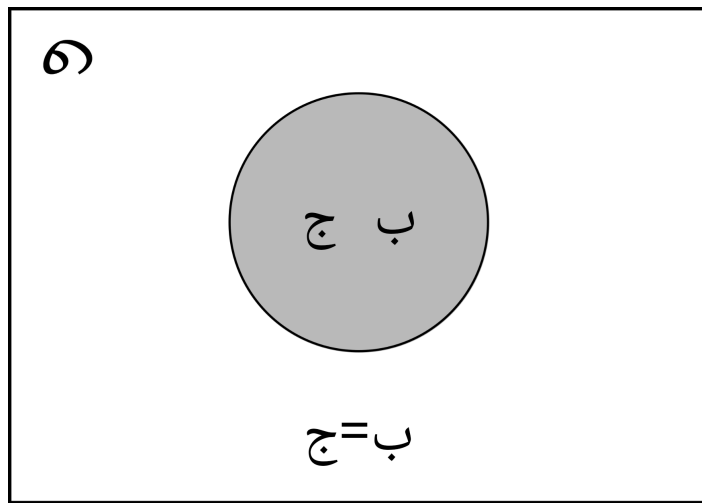
و اختصاراً "ب خاص متساوی ج" و "ج عام متساوی ب" پڑھ سکتے ہیں۔

و اگر ب ج سے خاص نہ ہو و نا ہی اس کے متساوی ہو تو تو تحریر کرے گا کہ ب⊈ج یعنی "ب نا خاص متساوی ج"، وایسی ہی ج⊉ب یعنی "ج نا عام متساوی ب"۔

بہر حال اس کی حد ہے ب⊆ج ↔ ∀ح(ح∈ب ← ح∈ج)، رسمۂ 3۔

یہاں ہم نے ⌜↔⌝ یعنی مانعت انفصال کی علامت استعمال کیا ہے کیونکہ اس کے دونوں جانب جو ہے وہ قبیل نہیں ہیں بلکہ قضایا ہیں، و ایسے ہیں کہ یا تو ایک ساتھ صادق ہوں گے یا ایک ساتھ کاذب۔

رسمۂ 3

و اگر دوسرا قبیل بھی پہلے کے خاص متساوی ہو جیسے ب⊇ج ∧ ج⊇ب، تو ان دونوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کا **متساوی** کہیں گے، و اس کو ⌝ = ⌜ سے تعبیر کریں گے جیسے ب=ج، و اس کا ترجمہ ہوگا "ب متساوی ہے ج کے"، و ہم "ب متساوی ج" پڑھیں گے۔ و یہیں سے معلوم ہوا کہ ب⊇ب یعنی ہر قبیل خود کے خاص متساوی ہوتا ہے، کیونکہ ب=ب یعنی ب خود کے متساوی ہے۔

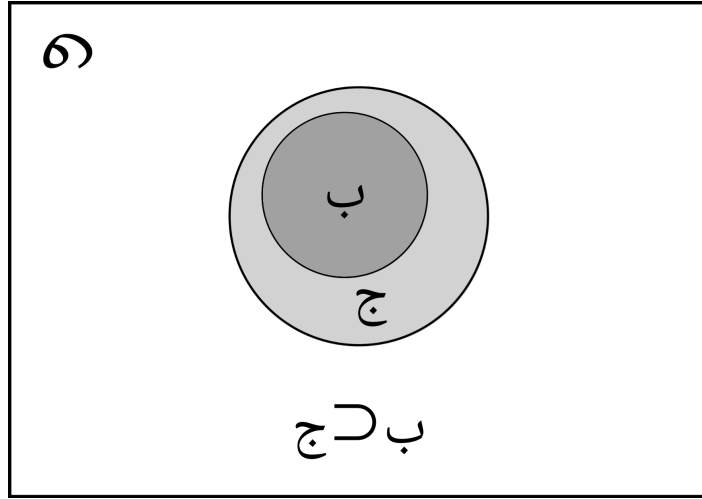
خیر اس کی حد ہے ب=ج ↔ ∀ح(ح∋ب ↔ ح∋ج)، رسمۂ 4۔

رسمۂ 4

و اگر ایک قبیل دوسرے کے خاص متساوی ہو لیکن متساوی نہ ہو جیسے ب⊇ض ∧ ب≠ض، تو ہم پہلے کو **خاص** کہیں گے، و دوسرے کو **عام**۔ و اس کو ⌐ ⊃ ¬ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے ب⊃ض، و اس کا ترجمہ ہوگا "ب خاص ہے ض سے"،

و ب⊃ض = ض⊂ب، تساوی کے بائیں والے کا ترجمہ ہوگا "ض عام ہے ب سے"۔

و ہم "ب خاص ض" و "ض عام ب" پڑھیں گے۔

و اس کی حد ہے ب⊃ج ↔ ∀ح(ح∋ب ← (ح∋ج ∧ Eس(س∋ج ∧ س≠ح)))، رسمہ 5۔

اس حد کا ترجمہ ہوگا کہ ہر ح جو ب ہے تو وہ ج ہے و بعض س ایسے ہیں جو ج ہیں و ح نہیں ہیں۔

رسمۂ 5

و اگر دو قبائل میں سے کسی کا کوئی فرد کسی میں داخل نہ ہو یعنی ب⊇ج' ∧ ج⊇ب'، تو ان دونوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کا **متباین** کہیں گے، و اس کی تعبیر کے لیے کوئی مخصوص علامت نہیں ہے۔

و اس کی حد ہے (ب⊇ج' ∧ ج⊇ب') ↔ ∀حـ(ح∋ب ∧ ح∋ج)۔ رسمۂ 6۔

مثال ب := {1، 2، 3، 8}، ج := {4، 5، 6، 7، 9}، ایک دوسرے کے متباین ہیں۔

یہاں ایک اہم امر کا انکشاف ہوتا ہے کہ قبیلِ خالی ہر غیر خالی قبیل سے خاص ہے یعنی

∅⊂ب جب کہ ب ایک غیر خالی قبیل ہو یعنی ب≠∅، کیونکہ

∅⊂ب ↔ ∀ح(ح∈∅ → (ح∈ب ∧ ∃س(س∈ب ∧ س≠ح))

گر چہ خالی میں کوئی فرد نہیں ہے لیکن یہ عبارت اس پہ صادق آئے گی کیونکہ اگر مقدم کاذب ہو تو شرطی متصل صادق ہوتا ہے۔ جس کی بحث منطق جملی یعنی منطق مرتبۂ صفر میں کی جاتی ہے۔

و ایسے ہی وہ ھ سے بھی خاص ہے کہ ∀ح(ح∈∅ ↔ ح∈ھ ∧ ∃س(س∈ھ ∧ س≠ح)) و خود کے متساوی ہے یعنی ∅ = ∅ کیونکہ ہر قبیل خود کے متساوی ہوتا ہے جیسا کہ گزر چکا ہے۔ خوب غور کر کے سمجھ لو۔

و ہمیشہ متنبّہ رہنا کہ خاصیت و فردیت دو مختلف امور ہیں۔ ایک چیز کے کسی قبیل کا فرد ہونے سے مراد اس میں داخل ہونا ہے جیسے ج∈{ب، ج، ش}۔ و ایک قبیل کا دوسرے قبیل کے خاص متساوی ہونے سے مراد اس قبیل کے کسی فرد کو اپنے ضمن میں رکھنا ہے جیسے {ج}⊆{ب، ج، ش}۔ و کبھی ایک قبیل دوسرے کا فرد بھی ہوتا ہے و اس کا خاص متساوی بھی ہوتا ہے جیسے ض := {ب، ج، {ج}، ش} میں {ج}، کہ {ج}∈ض، و {ج}⊆ض، و ایسے ہی اس میں {{ج}}⊆ض بھی ہوگا، و ج∈ض تو ہوگا ہی۔ خوب غور کر کے سمجھ لو۔

تلفیف عبارت

قضایا کی عبارت جو نقوش میں تحریر کی گئی ہو اس کو **فارمولہ** کہا جاتا ہے جیسے ج∋ب و ب=ض فارمولے ہیں، جب کہ ح+س فارمولہ نہیں ہے کیونکہ قضیہ نہیں ہے۔ و تلفیفِ فارمولہ سے مراد فارمولہ کو لپیٹنا ہے یعنی اسے ایک حرف سے تعبیر کرنا، جسے ہم **فصل** کہیں گے، جیسے ب()، ج() وغیرہ۔ و حروف کے بعد جو اقواس ہیں اس میں ہر وہ بے نقطہ حرفِ مسکور تحریر کیا جائے گا جو عبارتِ میں واقع ہوا ہو، و تب ہم اس حرف کو **منزِل** کہیں گے۔

و ہم کسی بھی فارمولہ کو ملفوف کر سکتے ہیں جیسے ایجابی عدد اولی کی حد، جو پہلے گزری ہے۔

عل := {ح | ح∋عط ∧ ∀س∋عط(ح\س∋عط → (س=1 ∨ س=ح)) }

تو ہم تحریر کر سکتے ہیں کہ

ب(س) :- (س=1 ∨ س=ح)

تو ہوگا عل = { ح | ∀س∋عط(ح\س∋عط → ب(س)) }

و ب(س) تبھی صادق ہوگا جب س 1 یا ح کے متساوی ہوگا۔

اس میں گر چہ س ⌝∀⌜ سے مقیَّد ہے لیکن عبارتِ ملفوف کے باہر، جب کہ اس کے اندر مطلق ہے یعنی وہ عبارت ملفوف میں منزل ہے لہذا اقواس میں وضع کیا گیا۔

و ⌝:-⌜ یعنی علامت کولن ڈیش سے میری مراد ہے اس کے پہلے والی عبالی کو بعد والی عبارت پہ دال بنانا، یعنی اب پہلے والی عبارت سے بعد والی عبارت مراد ہوگی۔

ایسے ہی ت(ح، س) :- ح\س∋عط

تو ہوگا عل := {ح | ح∋عط ∧ ∀س∋عط(ت(ح، س) → (س=1 ∨ س=ح)) }

و ت(ح، س) تبھی صادق ہوگا جب ح کو س سے تقسیم کرنے پہ نتیجہ عدد طبیعی آئے۔ اس میں بھی س کا حکم پہلے کے مثل ہے یعنی وہ مطلق ہے۔

ایسے ہی ق(ح، س) :- ح\س∈عط ← (س=1 ∨ س=ح)
تو ہوگا عل = {ح | ح∈عط ∧ ∀س∈عط(ق(ح، س))}
و ق(ح، س) تبھی صادق ہوگا جب مقدم و تالی یعنی ت(ح، س) و ب(س) صادق ہوں گے یا ت(ح، س) کاذب ہوگا۔ اس میں بھی س کا حکم پہلے کے مثل ہے۔

ایسے ہی ج(ح) :- ∀س∈عط(ح\س∈عط ← (س=1 ∨ س=ح))
تو ہوگا عل = {ح | ح∈عط ∧ ج(ح)}
و ج(ح) تبھی صادق ہوگا جب ہر س کے لیے ق(ح، س) صادق ہوگا۔
اس عبارت میں س کو اقواس میں وضع نہیں کیا جا سکتا کیونکہ عبارتِ ملفوف میں س ∀ سے مقید ہے۔

و ایسے ہی پ(ح) :- ح∈عط ∧ ∀س∈عط(ح\س∈عط ← (س=1 ∨ س=ح))
تو ہوگا عل = {ح | پ(ح)}

خیر ہم غیرِ فارولہ کو بھی ملفوف کر سکتے ہیں یعنی دالّہ کو جس کا ذکر آگے آئے گا۔ اس کی خاصیت یہ ہے کہ وہ نتیجہ دینے والی عبارت ہوتی ہے جیسے ⌜5+3⌝، اگر سوال کیا جائے کہ یہ صادق یا کاذب؟ تو تو جواب نہ دے سکے گا، و اگر سوال کیا جائے کہ اس کا نتیجہ کیا ہوگا تو تو جواب دے گا کہ 8۔ و ایسی عبارت کی تحریر کے لیے ہم حرف ہجا کے ساتھ الف وضع کریں گے جیسے با()، جا() وغیرہ۔

تو اگر با() :- 4+5   تو با() = 9

چونکہ عبارتِ مذکور میں کوئی منزل نہیں ہے لہذا عبارت ملفوف کے اقواس میں کوئی حرف نہیں ہے۔

و اگر سوال کیا جائے کہ ح+5 کتنا ہے؟ تو تو سوال کرے گا کہ ح کیا ہے؟ پھر جب تجھے ح کی قیمت بتائی جائے گی تو اسی کے اعتبار سے تو جواب دے گا۔

تو اگر جا(ح) :- ح+5

تو اب ح سے جو عدد مراد ہوگا اسی کے مطابق نتیجہ آئے گا۔

ح=1 ← جا(ح)=6

ح=2 ← جا(ح)=7

ح=6 ← جا(ح)=11

هم ⌝:-⌜ کو ⌝=⌜ سے تبدیل کر سکتے ہیں بلا حرج، و تب کولن ڈیش تساوی میں شامل ہوگا۔

تنبیہ کرتے ہیں ہم اس بات پہ کہ ہمارا قول "دالہ نتیجہ دینے والی عبارت ہے" محض لفظی تعبیر ہے، ورنہ حقیقت یہ ہے کہ کوئی عبارتِ ریاضی نتیجہ نہیں دیتی بلکہ وہ تو محض نقوش کی ایک نظم ہوتی ہے و ایک نسخہ ہوتی ہے جس پہ ہمارا دماغ عمل کر کے نتیجہ حاصل کرتا ہے۔

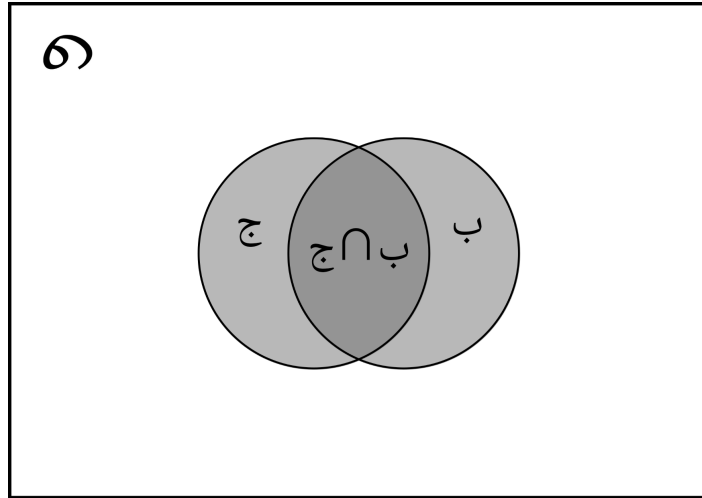
قبیلِ مرکب

قبیل مرکب وہ قبیل ہے جو ایک سے زیادہ قبائل کو مرکب کر کے بنایا گیا ہو۔ و اس کی ترکیب **ثنائی** ہوتی ہے یعنی ایک دفعہ میں خالص دو قبائل کو ہی مرکب کیا جا سکتا ہے، پھر جو حاصل ہوگا اس کے ساتھ تیسرے کو مرکب کیا جائے گا و ایسے ہی مزید کو۔

قبیل مشترک وہ ہے جس کے افراد دو قبائل میں شریک ہوں و اس کی علامت ہے ⌜∩⌝، جیسے ب∩ج، اس کو "ب مشترک ج" پڑھیں گے۔

و اس کی حد ہے ب∩ج = {ح | ح∈ب ∧ ح∈ج}۔

و حد سے ظاہر ہے کہ ب∩ج = ج∩ب

رسمۂ 7 سے اس کی مزید وضاحت ہو جاتی ہے۔

رسمۂ 7

مثال ب ≔ {1، 2، 3، 4، 5} و ج ≔ {4، 5، 6، 7}

∴ ب∩ج = {4، 5}

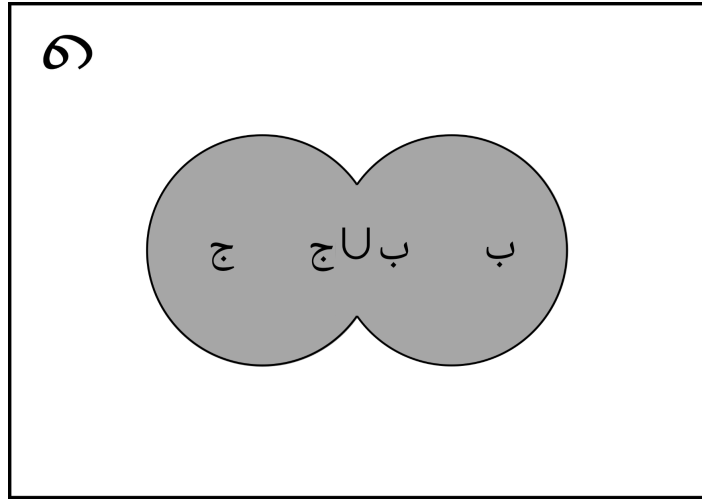
اگر ب مشترک ج قبیل خالی ہو یعنی ب∩ج = ∅، تو دلیل ہے کہ ب و ج متباین ہیں۔

مثال ب ≔ {1، 2، 3} و ج ≔ {4، 5، 6}

∴ ب∩ج = { } = ∅

قبیل متحد وہ ہے جس میں دو قبائل کے تمام افراد جمع ہوں و اس کی علامت ⌜ ∪ ⌝ ہے جیسے ب∪ج، اس کو "ب متحد ج" پڑھیں گے۔

و اس کی حد ہے ب∪ج = {ح | ح∋ب ∨ ح∋ج}۔ رسمۂ 8۔

و حد ظاہر ہے ب∪ج = ج∪ب

رسمۂ 8

مثال ب ≔ {1، 2، 3} و ج ≔ {4، 5}

∴ ب∪ج = {1، 2، 3، 4، 5}

و اگر دونوں قبیل میں مشترک افراد موجود ہوں تو ان کو ایک ہی مرتبہ تحریر کیا جائے گا

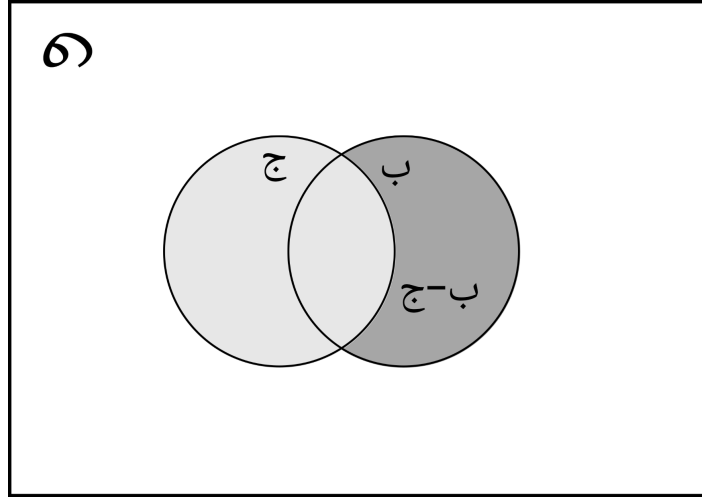
مثال ب ≔ {1، 2، 3} و ج ≔ {2، 3، 4، 5}

∴ ب∪ج = {1، 2، 3، 4، 5}

کیونکہ ایک قبیل میں ایک فرد ایک ہی مرتبہ آتا ہے جیسا کہ گزر چکا ہے۔

قبیل مفضَّل وہ ہے جو ایک قبیل سے دوسرے قبیل کے افراد نکالنے سے بنا ہو جسے ⌜ – ⌝ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے ب – ج، کہ اس کو ہم "ب مفضّل بر ج" کہیں گے۔

و اس کی حد ہے ب – ج = {ح | ح∈ب ∧ ح∉ج}. رسمۂ 9.

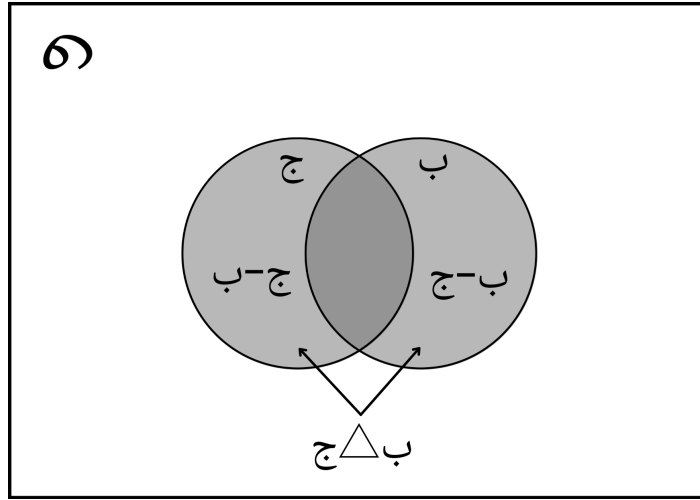
و حد مذکور سے معلوم ہوا کہ ب – ج ≠ ج – ب

رسمۂ 9

مثال ب := {1، 2، 3، 4} و ج := {3، 4، 5، 6}

∴ ب – ج = {1، 2}

قبیل متفاضل وہ ہے جو دو قبائل کے افراد مشترک کے علاوہ سے بنا ہو جسے ⌜ △ ⌝ سے تعبیر کیا جاتا ہے جیسے ب △ ج، کہ اس کو "ب متفاضل ج" پڑھیں گے۔

و اس کی حد ہے ب △ ج = {ح | ¬(ح∈ب ↔ ح∈ج)}. رسمۂ 10.

حد مذکور سے واضح ہے کہ ب △ ج = ج △ ب.

رسمۂ 10

مثال ب ≔ {1، 2، 3، 4} و ج ≔ {3، 4، 5}

∴ ب△ج = {1، 2، 5}

و واضح رہے کہ ب△ج = (ب−ج ∪ ج−ب) = (ب∪ج − ب∩ج)

کسی قبیل کے **قبیلِ جامع** سے مراد اس کے تمام خاص متساوی قبائل کا مجموعہ ہے، و اس کو ہم ⌐ ع() ⌐ سے تعبیر کریں گے تو ب کا قبیل جامع ہوا ع(ب).

تو اگر ب ≔ {1، 2}

تو ع(ب) = {∅، {1}، {2}، {1، 2}}

کیونکہ اگر ہم ایک ایسا قبیل وضع کریں جس میں خالص 1 ہو یعنی {1} تو یہ ب کے خاص متساوی ہوگا یعنی {1}⊇ب لا محالہ، و ایسے ہی {2}⊇ب بھی ہے، و ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ∅⊇ب و ب⊇ب. بس ان کے علاوہ مزید کوئی قبیل ب کا خاص متساوی نہیں ہو سکتا.

و اگر ہم {1} کو نام دے دیں مثلاً ش و {2} کو ض یعنی ش≔{1} و ض≔{2}

تو ہوگا ع(ب) = { ∅، ش، ض، ب }، اس سے خوب ظاہر ہو گیا کہ ہر قبیل خود اپنے قبیل جامع کا ایک فرد ہوتا ہے کہ ب∋ع(ب).

و ہمیشہ یاد رکھنا کہ ش⊆ب و ش∉ب جب کہ ش∈ع(ب) و ش⊈ع(ب) و یہی حال باقی تمام افراد کا بھی ہے مثلاً ب⊆ب و ب∉ب جب کہ ب∈ع(ب) و ب⊈ع(ب)، بکلہ {ب}⊆ع(ب) و ایسے ہی {ش}⊆ع(ب)۔ خوب سمجھ لو۔

و اگر ج =: {1، 2، 3}
تو ع(ج) = { {∅}، {1}، {2}، {3}، {1، 2}، {2، 3}، {1، 3}، {1، 2، 3} }

ان مثالوں میں غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی قبیل کے قبیلِ جامع کا طول $2^{ط}$ ہوگا جب کہ ط سے مراد اس قبیل کا طول ہو، مثال |ع(ب)|=$2^{ط}$ جب کہ ط=|ب|، یعنی |ع(ب)|=$2^{|ب|}$ بھی تحریر کر سکتے ہیں۔
تو اگر |ب| = 2 تو |ع(ب)| = 2^2 = 4
و اگر |ب| = 3 تو |ع(ب)| = 2^3 = 8
و اگر |ب| = 4 تو |ع(ب)| = 2^4 = 32

قبیلِ مرتب

اس سے مراد وہ قبیل ہے جس کے افراد مرتب ہوں یعنی جس میں افراد کی ترتیب معتبر ہو و اسے "( )" سے تعبیر کرتے ہیں جیسے (1، 2)۔
لہذا (1، 2) ≠ {1، 2} گر چہ دونوں کے افراد متساوی ہیں لیکن دوسرے میں ترتیب معتبر نہیں ہے یعنی {1، 2} = {2، 1}؛ جب کہ پہلے میں ترتیب معتبر ہے یعنی (1، 2) ≠ (2، 1)۔

و ایسے ہی (ب، ج، ش، ف) ہے، کہ اگر ہمیں (ب، ج، ش، ف) کی تعریف بیان کرنا ہو تو وہ {ب، ج، ش، ف} تو ہو نہیں سکتی کیونکہ اس میں ترتیب معتبر نہیں ہے یعنی
{ب، ج، ش، ف} = {ش، ب، ف، ج} = {ف، ش، ب، ج}، جب کہ ہمیں تو ترتیب چاہیے ہے۔
لہذا ہمیں ایسا طریقہ چاہیے جس سے افراد کے ساتھ ان کی ترتیب بھی بیان کی جا سکے و وہ دو ہیں۔

پہلا طریقہ یہ ہے کہ ہر بعد والے فرد کو پہلے والوں کے ساتھ جمع کرو جیسے
(ب، ج، ش، ف) = { {ب}، {ب، ج}، {ب، ج، ش}، {ب، ج، ش، ف} }۔
یہ عبارت عجیب تو ہے لیکن معنی مراد کو ادا کرتی ہے۔ یہاں تک کہ اگر ہم مذکورہ قبیل و اس میں داخل تمام قبائل کی ترتیب تحریر میں متغیر کر دیں تب بھی وہ حقیقت میں متغیر نہ ہوگی مثلاً { {ب، ج}، {ب، ش، ج، ف}، {ب، ش، ج}، {ب} }
اب اگر تو اس میں غور کرے گا تو جان لے گا کہ جو ہر قبیل میں داخل ہے وہ پہلا ہے یعنی ب، و جو ایک کو چھوڑ کے سب میں ہے وہ دوسرا ہے یعنی ج، و باقی کو اسی پہ قیاس کر لو، یہاں تک کہ جو خالص ایک قبیل میں ہو وہ آخری ہوگا جو یہاں ف ہے۔
تو اگر (ب، ج) = (ض، ف)   تو ہوا ب = ض و ج = ف
کیونکہ { {ب}، {ب، ج} } = { {ض}، {ض، ف} }   تو ہوا {ب} = {ض} و {ب، ج} = {ض، ف}۔

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ قبیل مرتب کے ہر فرد کو ایک عدد کے ساتھ معلّق کر دو جیسے (ب، ج، ش، ف) = { {ب، 1}، {ج، 2}، {ش، 3}، {ف، 4} }۔ لیکن پہلا طریقہ افضل ہے۔

جاننا چاہیے کہ جس قبیلِ مرتب میں ط عدد افراد ہوں اس کو ہم **ضِعف ط** کہیں گے جیسے (ب$_1$، ب$_2$، ...، ب$_{ط}$) ضعف ط ہے، و (ب، ش، ض) ضعف 3 ہے، و (ج، ض، ق، غ) ضعف 4 ہے، و (ب، ق) ضعف 2 ہے۔

و ضعف 2 کو ہم خصوصا **زوجِ مرتب** کہیں گے جیسے (2، 1) و (ج، ف) وغیرہ۔

قبیلِ کارتیسی

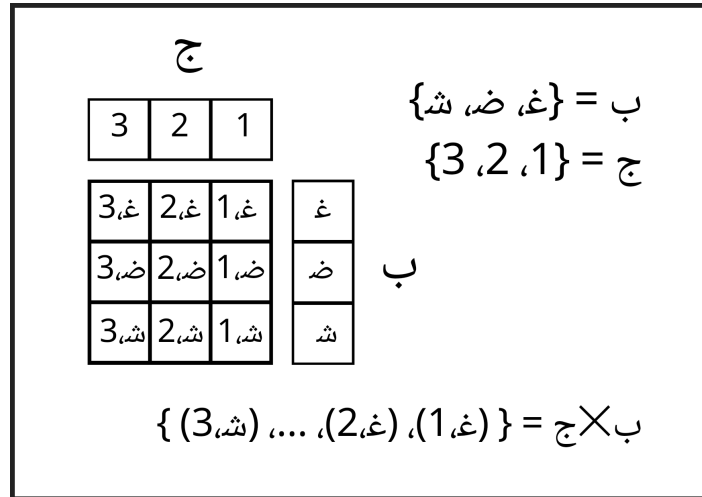
قبیل کارتیسی یا **حاصل کارتیسی** وہ قبیل ہے جو دو قبائل کے درمیان عملِ کارتیسی کرنے سے حاصل ہوا ہو۔ و عمل کارتیسی سے مراد ایک قبیل کے ہر فرد کو دوسرے کے ہر فرد کے ساتھ ملا کے ازواج مرتب بنانا ہے۔ و اسے تحریر میں "×" سے تعبیر کیا جاتا ہے جیسے ب×ج، جسے ہم "ب در ج" پڑھیں گے۔ مثال،

اگر ب =: {ب، ج}، ج =: {1، 2}

تو ب×ج = {(ب، 1)، (ب، 2)، (ج، 1)، (ج، 2)}

و ج×ب = {(1، ب)، (1، ج)، (2، ب)، (2، ج)}

یعنی ب×ج ≠ ج×ب اس کو خوب سمجھ لو۔

تو حاصل کارتیسی کی حد ہوئی ب×ج = {(ح، س) | (ح∈ب ∧ س∈ج)}۔ رسمۂ 13.

رسمۂ 13

و ب×ج×ض = {(ح، س، ع) | (ح∈ب ∧ س∈ج ∧ ع∈ض)}

و ایسے ہی ب$_1$×ب$_2$×...×ب$_ط$ = {(ح$_1$، ح$_2$، ...، ح$_ط$) | ح$_1$∈ب$_1$ ∧ ح$_2$∈ب$_2$ ∧ ... ∧ ح$_ط$∈ب$_ط$}

اس میں ⌝ب$_1$×ب$_2$×...×ب$_{ط}$⌜ سے ط عدد قبائل کا حاصل کارتیسی مراد ہے،
و ⌝(حـ$_1$، حـ$_2$، ...، حـ$_{ط}$)⌜ سے ضعفِ ط مراد ہے، و ⌝حـ$_1$∈ب$_1$ ∧ حـ$_2$∈ب$_2$ ∧ ... ∧ حـ$_{ط}$∈ب$_{ط}$⌜ کا
معنی ظاہر ہے، خوب سمجھ لو۔

و جاننا چاہیے کہ **تربیعِ کارتیسی** سے ہماری مراد کسی قبیل کی خود میں کارتیسیت کرنا ہے
مثلاً ب کا تربیع کارتیسی ہوگا ب×ب = ب^2۔
و ایسے ہی **تعکیب کارتیسی** ہوگا ب×ب×ب = ب^3۔
و ایسے ہی **کارتیسی بقدر ط** سے مراد ہے ب^{ط} = {(حـ$_1$، ...، حـ$_{ط}$) | حـ$_1$∈ب ∧ ... ∧ حـ$_{ط}$∈ب}۔
و اگر ط = 1، تو ب^1 = {حـ | حـ∈ب} کیونکہ ب^1 = ب۔

تعلُّق

تعلق سے مراد وہ قبیل ہے جو موجودات کے درمیان کسی تعلق پہ دلالت کرے جیسے زید نے زینب سے شادی کیا تو وہ دونوں زوجین کے قبیل میں شامل ہو گئے، و زوجین سے وہ قبیل مراد ہے جس کا ہر فرد مرد عورت کا جوڑا ہے جنھوں نے آپس میں شادی کیا ہے۔

و اس کی حد ہوگی ت = {(ح، س) | ح∈ب ∧ س∈ج ∧ ق(ح، س)}۔ رسمۂ 11.

جب کہ

ت = زوجین کا قبیل

ب = مردوں کا قبیل

ج = عورتوں کا قبیل

ق(ح، س) :- ح نے س سے شادی کیا

اس حد میں غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم اس میں سے ق(ح، س) کو ساقط کر دیں تو ت؛ ب و ج کا حاصل کارتیسی بن جائے گا یعنی ت = ب×ج۔

کیونکہ ب×ج = {(ح، س) | ح∈ب ∧ س∈ج}۔

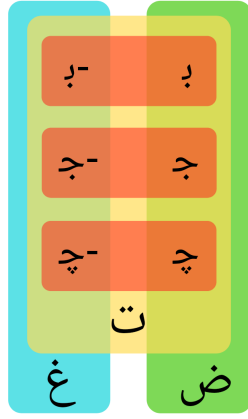
لیکن ق(ح، س) نے ت میں سے ب×ج کے بعض افراد کو جدا کر دیا تو ت ب×ج سے خاص ہو گیا۔

تو ہم کہ سکتے ہیں کہ ت ⊆ (ب×ج)۔

یعنی ہر تعلق اپنے متعلقوں کے قبائل کے حاصلِ کارتیسی سے خاص یا متساوی ہوتا ہے۔ خوب سمجھ لو۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مذکورہ تعلق دو قبائل ب و ج میں ہے۔ و تعلق کبھی خالص ایک قبیل میں ہی ہوتا ہے یعنی اسی کے افراد میں جیسے باپ بیٹے کا تعلق کہ جس میں ح و س کے جوڑے داخل ہیں، جب کہ ح سے باپ و س سے اس کا بیٹا مراد ہو، و دونوں ہی مرد ہوتے ہیں۔
تو ہوا ت = {(ح، س) | ح∈ب ∧ س∈ب ∧ ق(ح، س)}
جب کہ
ت = باپ بیٹے کے تعلق کا قبیل
ب = مردوں کا قبیل
ق(ح، س) **:-** ح س کا باپ ہے۔
تو ہم کہ سکتے ہیں کہ ت ⊆ ب^2۔

و تعلق جب دو چیزوں میں ہو تو اس کو ہم **تعلق ثنائی** کہیں گے جیسے مذکورہ تعلقات تعلق ثنائی ہیں۔ و جب تین میں ہو تو **تعلق ثلاثی** جیسے (ح، س، ص)∈غ، و ایسے ہی **تعلق رباعی** و **خماسی** وغیرہ استعمال کریں گے۔ و اگر تعلق ط عدد اشیاء میں ہو یعنی (ح$_1$، …، ح$_{ط}$)∈ل تو اسے **تعلق طائی** کہیں گے۔

فرض کرو کہ ض عددِ ایجابی کا قبیل ہے، و غ عدد سلبی کا قبیل ہے، و ت ایجابی و سلبی کے تعلق کا قبیل ہے۔
تو ہوگا (ح، س)∈ت جب کہ ح∈ض و س∈غ۔ رسمۂ 12۔

رسمۂ 12

بہر حال اگر سوال کیا جائے کہ وہ تعلق کیا ہے جو ایجابی و سلبی میں ہے، تو جواب ہوگا کہ

س = ح × –1 ۔

تعلق ثنائی کی کیفیت

چونکہ تعلق ثنائی خالص دو چیزوں کو متعلق کرتا ہے لہذا اس کی تحریر کا ایک مخصوص طریقہ ہے کہ اسے دونوں کے درمیان میں ذکر کیا جاتا ہے ⌝ح قس⌜ جیسے ب<ج و ج>ب ۔

تعلق ثنائی کی تین کیفیات ہوتی ہیں **تعدیہ** و **تناظر** و **نفسیت**۔ و جس تعلق میں تعدیہ ہو اس کو ہم متعدی کہیں گے، و جس میں تناظر ہو اس کو تناظری، و جس میں نفسیت ہو اس کو نفسی۔ و اب ان کی تفصیل وارد ہے۔

متعدی وہ تعلق ہے جو اگر ایک چیز کا دوسری سے ہو و دوسری کا تیسری سے ہو، تو پہلی کا تیسری سے ہوگا جیسے اگر زید عمرو سے لمبا ہے و عمرو بکر سے لمبا ہے تو زید بکر سے لمبا ہے؛ یعنی بقج و جقش، تو بقش۔

تناظری وہ تعلق ہے جو اگر ایک چیز کا دوسری سے ہو تو دوسری کا پہلی سے ہوگا جیسے اگر زید نے زینب سے شادی کیا، تو زینب نے زید سے شادی کیا؛ یعنی بقج تو جقب ۔

نفسی وہ تعلق ہے جو ایک چیز کا خود سے ہو جیسے زید کا باپ عمرو کا باپ ہے، اس میں زید کا باپ عمرو کے باپ کی طرف منسوب ہے یعنی خود کی طرف؛ یعنی بقب ۔

و جو تعلق متعدی، تناظری و نفسی تینوں ہو تو اس کو ہم **تعلقِ مثلی** کہیں گے، و اس کو ⌝ = ⌜ سے تعبیر کرتے ہیں جیسے ب=ج تو ج=ب ، و ب=ض تو ج=ض ، و ب=ب ۔

دالّہ

دالہ سے ہماری مراد تطبیق دینے والی عبارت ہے یعنی وہ جو چیزوں کی مطابقت کو ظاہر کرے جیسے

ما(ح) :- ح×2

تو لازم ہے کہ

ما(1) = 2

ما(2) = 4

ما(3) = 6

اس میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کیسے ما(ح) کا مدلول ہر مرتبہ ح کے مطابق حاصل ہوا ہے، بلکہ یہ کہ سکتے ہیں کہ ہر ح کے لیے ایک مخصوص ما(ح) ہے۔ و اس کی قیمت کو ایک حرف سے تعبیر کیا جاتا ہے جیسے س = ما(ح)، اس میں ہم نے ما(ح) کی قیمت کو س سے تعبیر کیا ہے۔

و یہیں سے معلوم ہوا کہ دالہ تعلق پہ دلالت کرتا ہے کیونکہ اگر کوئی چیز کسی کے مطابق ہے تو لازم ہے کہ ان میں کوئی تعلق ہے، لا محالہ۔ لہذا مثال مذکور میں ما دلالت کر رہا ہے (ح، س)∋ق پہ، جس کو ایسے بھی کہ سکتے ہیں کہ (ح، ما(ح))∋ق پہ، و یہاں ق سے ہماری مراد ایسا قبیل ہے جس میں ایسے (ح، س) داخل ہیں جن کا س ح کا دگنا ہے۔ و لہذا س=ما(ح) کو (ح، س)∋ما بھی تحریر کیا جا سکتا ہے۔ و اگر کوئی کہے کہ پھر تو اس کی تحریر (ح، ما(ح))∋ما بھی ہو سکتی ہے، تو ہم کہیں گے کہ ہاں ہو سکتی ہے لیکن اس کی حاجت نہیں ہے۔

بہر حال تمام ح کے مجموعہ کو **ساحۂ دالہ** کہا جاتا ہے و تمام س کے مجموعہ کو **حیطۂ دالہ** کہا جاتا ہے۔ تو اگر ب ایک قبیل ہے جس میں صرف ما کے تمام ح داخل ہیں، و ج ایک قبیل ہے

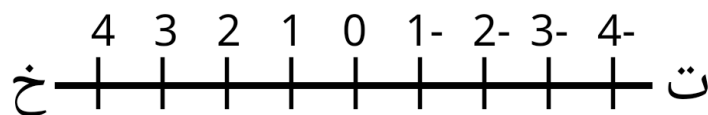
جس میں صرف ما کے تمام س داخل ہیں، تو ب ساحۂ ما ہوا و ج حیطۂ ما ہوا۔ و ساحہ و حیطہ کے اتحاد کو **میدانِ دالہ** کہا جاتا ہے مثلاً ض میدانِ ما ہے تو ہوا ض=ب∪ج۔

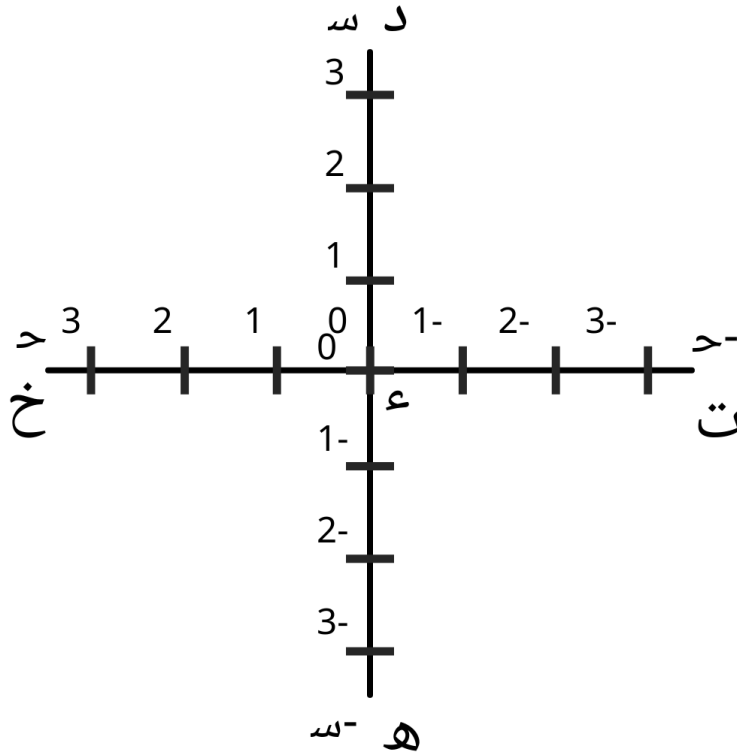
جاننا چاہیے کہ جب کوئی دالہ ایک قبیل کی دوسرے قبیل میں تطبیق دیتا ہے تو اس کی ایک مخصوص تعبیر ہوتی ہے، مثلاً ما ایک دالہ ہے جسنے ب کو ج میں تطبیق دیا تو تعبیر ہوگی ما:ب←ج۔ واضح رہے کہ ایسی صورت میں ب تو ساحہ ہوتا ہے لیکن ج حیطہ سے عام متساوی ہوتا ہے کیونکہ

ما:ب←ج ↔ ∀ح(ح∋ب ← E!س(س=ما(ح) ∧ س∋ج))

اس سے ظاہر ہے کہ ما(ح) کا غیر بھی ج میں داخل ہو سکتا ہے، و پہلے گزر چکا ہے کہ حیطہ ما(ح) کے تمام مدلولات کا مجموعہ ہے، لہذا ج اس سے عام متساوی ہوگا۔

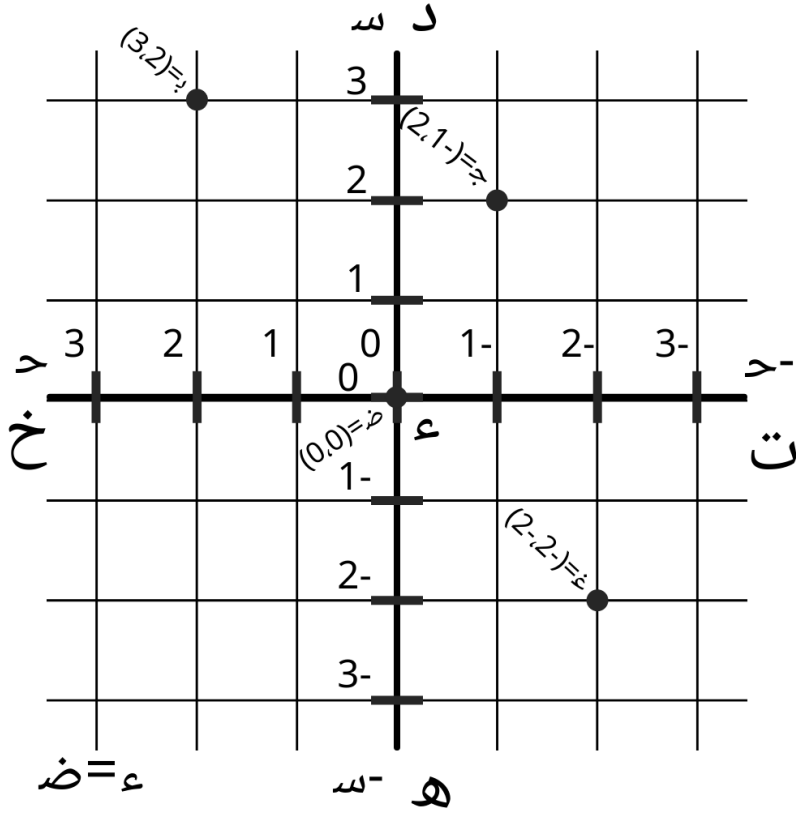
جاننا چاہیے کہ ہر دالہ کا ایک گراف ہوتا ہے جو اس کے ساحہ و حیطہ کی تطبیقات کو نمایا کرتا ہے۔ و گراف کا فہم سطح کارتیسی کے فہم پہ موقوف ہے، و اس کا فہم خط عددی کے فہم پہ موقوف ہے۔ تو لازم ہے کہ پہلے ہم خط عددی کا بیان کریں، پھر سطح کارتیسی کا، پھر گراف کا۔

خط عددی سے مراد وہ تحریر کردہ خطِ مستقیم ہے جس پہ اعداد کو ان کی قیمت کے مطابق کم سے زیادہ کے جانب تعبیر کیا گیا ہو، و چونکہ ہماری زبان کی تحریر داہنے سے بائیں ہے لہذا خط عددی بھی داہنے سے بائیں ہوگی جیسے خط تخ۔ رسمۂ 14۔

رسمۂ 14۔

سطح کارتیسی وہ سطح ہے جس پہ دو خطوط عددی اس طور پہ منقوش ہوتی ہیں کہ ایک دوسرے کو 90° درجہ کے زاویہ سے کاٹتی ہے۔ و جس نقطہ سے کاٹے اس کو ابتداء سطح کہتے ہیں جیسے رسمۂ 15 میں خط تخ و خط دھ۔

رسمۂ 15

اس میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دو خطوطِ عددی بج و دھ نے ایک دوسرے کو کاٹا ہے، و جہاں سے کاٹا ہے اس نقطہ کا نام ہم نے ء رکھا و یہی حرف آگے بھی استعمال کریں گے۔

و ان دونوں خطوط کو ہم **قطار** کہیں گے یعنی قطار حـ و قطار سـ ۔ و ء سے، یعنی ابتداء سطح سے، قطارِ حـ پہ کسی بُعد کو **متناسقِ حـ** کہتے ہیں، و قطارِ سـ پہ کسی بعد کو **متناسقِ سـ** کہتے ہیں۔

و ہر ح و س کا زوج اس سطح پہ موجود کسی معین نقطہ پہ دلالت کرتا ہے، و عادت جاری ہے کہ ح کو اس زوج مرتب کا پہلا فرد بنایا جاتا ہے و س کو دوسرا جیسے رسمۂ 16 میں ب=(2، 3) و ج=(−1، 2) و غ=(−2، −2) و ض=(0، 0).

رسمۂ 16

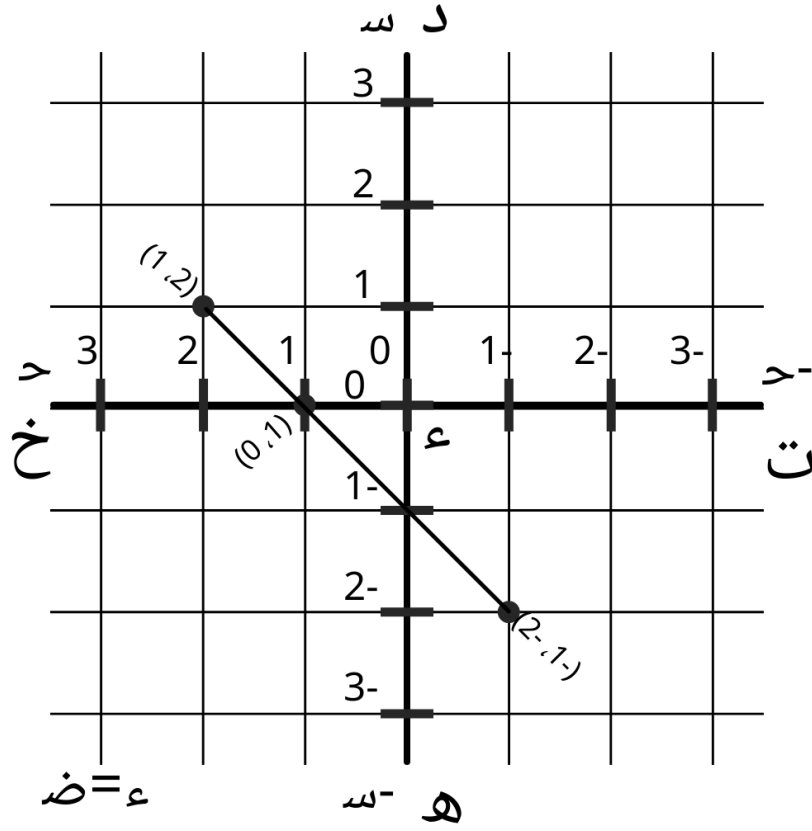
اب جاننا چاہیے کہ **گرافِ دالہ** وہ خط ہوتی ہے جو اُن نقاط کو ملانے سے بنتی ہے جو دالہ کے ساحہ و حیطہ سے قائم ہوتے ہیں جیسے رسمۂ 17 میں ہے.

ما(ح):- ح−1

و س=ما(ح) تو

ح=−1 ← س=−2

ح=1 ← س=0

ح=2 ← س=1

رسمۂ 17

کبھی دالہ کے ساحہ و حیطہ کے قبائل مختلف ہوتے ہیں جیسے تمام عدد طبیعی کے لیے

ما(ح) :- −ح

س = ما(ح)

تو اس کا ساحہ عص$^{+}$ یعنی عدد صحیح ایجابی، و حیطہ عص$^{-}$ یعنی عدد صحیح سلبی، ہوگا۔

و کبھی وہ دونوں مثلی ہوتے ہیں جیسے تمام عدد طبیعی کے لیے

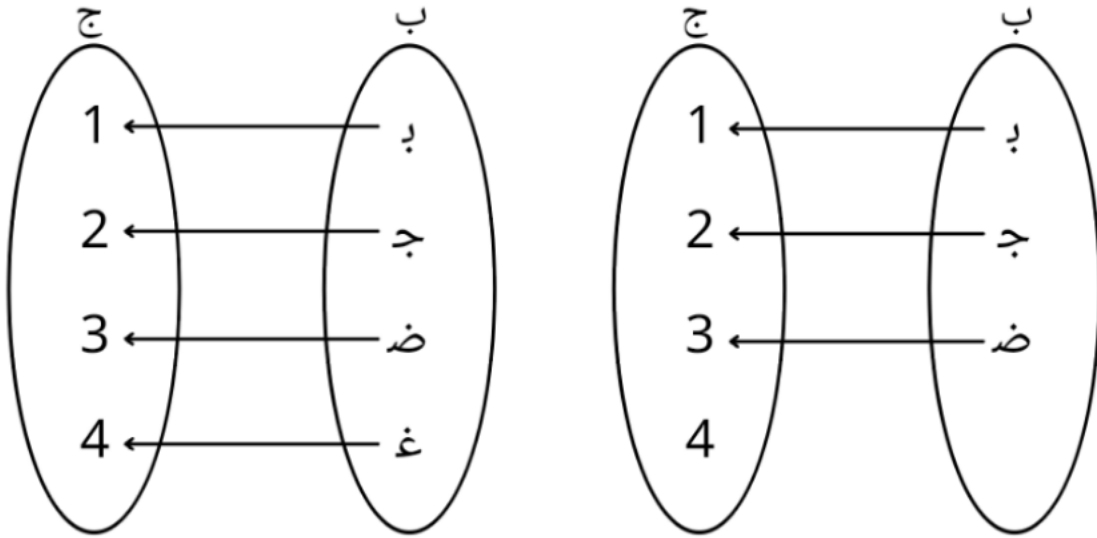
ما(ح) :- ح^{2}

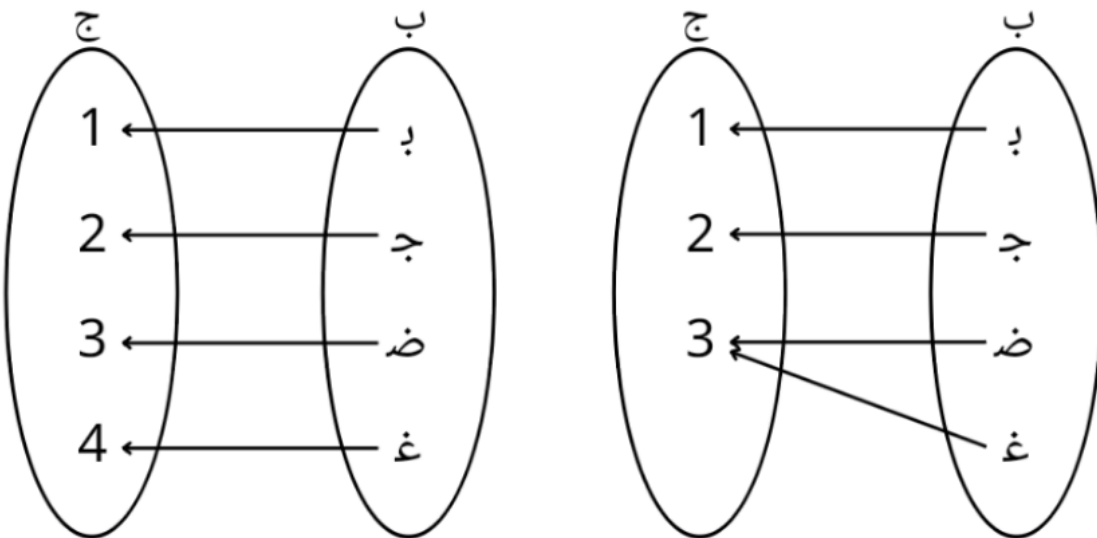
س = ما(ح)

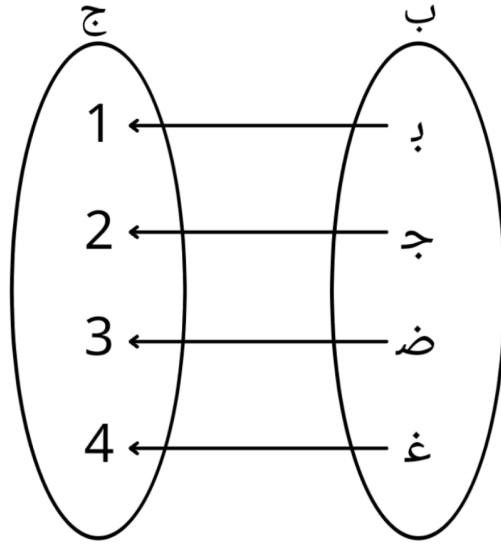
اس میں ساحہ و حیطہ دونوں ہی عط ہیں۔

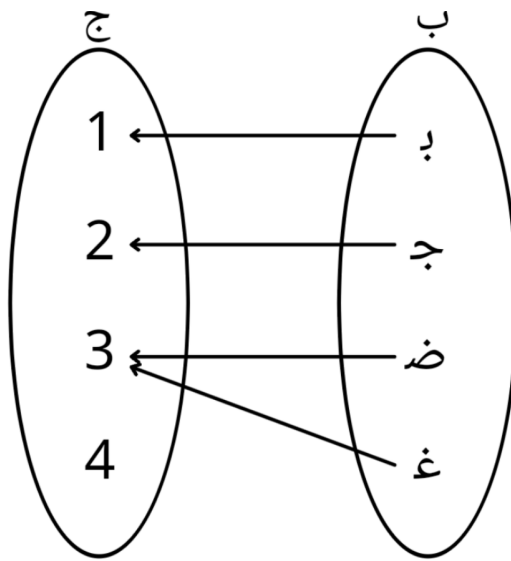
اقسام دالہ

تطبیق کے اعتبار سے دالہ کہ چار اقسام میں۔

دالۂ تباینی وہ دالہ ہے جس کے متباین ح کے لیے متباین س ہوں جیسے رسمہ 18

رسمۂ 18– 1، 2

دالۂ شاملی وہ دالہ ہے جس کے ہر س کے لیے بعض ح ہوں جیسے رسمۂ 19

رسمۂ 19– 1، 2

دالۂ تقابلی وہ دالہ ہے جو تباینی بھی ہو و شاملی بھی ہو جیسے رسمۂ 20

رسمۂ 20

رسمۂ 20 میں جو دالہ ہے وہ وہی ہے جو 18 و 19 میں دوسرا ہے کیونکہ وہ تباینی بھی ہے و شاملی بھی۔ و وہ دالہ جو نہ تباینی ہو و نا ہی شاملی اس کی مثال رسمۂ 21 میں ہے۔

رسمۂ 21

دالۂ معکوس

وہ دالہ ہے جو کسی دالۂ تقابلی کا عکس ہو، و اس کی تعبیر بلند سلبی 1 سے کی ساتی جیسے ما کا دالۂ معکوس ہوگا ما$^{-1}$۔ و دالۂ معکوس میں ساحہ و حیطہ کے قبیل پلٹ جاتے ہیں جیسے

ما:ب ← ج کا دالۂ معکوس ہوگا ما$^{-1}$:ج ← ب

یعنی اگر حـ∋ب و سـ∋ج تو سـ=ما(حـ) ↔ حـ=ما$^{-1}$(سـ)

دالۂ مثلی

وہ دالہ ہے جس کے ساحہ و حیطہ ایک ہی ہوں یعنی اس کی قیمت وہی آئے جو ہم اس میں داخل کریں جیسے حـ=ما(حـ)۔ و اسے ہم ⌐ ثہ ⌐ سے تعبیر کریں گے تو اگر ما:ج ← ج ایک دالۂ مثلی ہے تو ہم تحریر کریں گے کہ ثہج جس کا ساحہ و حیطہ دونوں ج ہے، یعنی اس کا میدان بھی ج ہے۔

و اگر ج = {1، 2، 3، …، ط} تو ثہج = {(1، 1)، (2، 2)، (3، 3)، …، (ط، ط)}۔

دالۂ مستقل

وہ دالہ ہے جس کے ساحہ کے تمام افراد کی قیمت ایک ہی آئے یعنی اس کے حیطہ میں ایک ہی فرد ہو، و اسے ہم ⌐ ۃ ⌐ سے تعبیر کریں گے جیسے اگر ما:ب ← ج دالہ مستقل ہے تو ہم تحریر کریں گے کہ ۃ:ب ← ج۔ مثال

اگر حـ∋{1، 2، 3، …}

و سـ=ما(حـ) ↔ سـ=(حـ×0)

تو ة:ب←ج = {(1، 0)، (2، 0)، (3، 0)، ...}

دالۂ مقصور و ممدود

دالۂ مقصور سے مراد ایسا دالہ ہے جس میں، کسی دوسرے قبیل کے اعتبار سے، ساحہ کے بعض یا کل پہ قصر کیا گیا ہو جیسے

ما:ب←ج میں ما کا ساحہ ب ہے۔

لکین ما$_{[ض]}$:ب←ج میں ما کا ساحہ ب∩ض ہے یعنی ب کے ان افراد کا مجموعہ جو ض میں بھی ہیں۔

یعنی ما$_{[ض]}$:ب←ج = ما:ب∩ض←ج۔

و ما$_{[ض]}$ کو ہم "ما مقصور بَر ض" پڑھیں گے۔

لہذا

ض⊇ب ← (ما$_{[ض]}$:ب←ج = ما:ض←ج) کیونکہ ب∩ض = ض

ض⊆ب ← (ما$_{[ض]}$:ب←ج = ما:ب←ج) کیونکہ ب∩ض = ب

ب⊉ض ← (ما$_{[ض]}$:ب←ج = ما:ب∩ض←ج)

ب∩ض=∅ ← (ما$_{[ض]}$:ب←ج = ما:∅←ج)

دالۂ ممدود سے مراد وہ دالہ ہے جس میں سے قصر کیا گیا ہو مثلاً مثال مذکور میں ما دالہ ممدود ہے ما$_{[ض]}$ کا۔

و ایسے ہی نا$_{[ف]}$:ض←ق میں نا دالہ ممدود ہے نا$_{[ف]}$ کا۔

دالۂ مختلط

وہ دالہ ہے جو ایک یا زیادہ دالات کے اختلاط سے بنا ہو و اس کو ⌝○⌜ سے تعبیر کرتے ہیں

جیسے ها○ما:ب←ض   جب کہ ما:ب←ج و ها:ج←ض

یعنی ها○ما(ح) = ها(ما(ح))

مثال:

س=ما(ح) ↔ س=(ح×2)

س=ها(ح) ↔ س=(ح×−1)

تو اگر ح=3 تو   ها(ما(ح))=−6

کیونکہ ما(3)=6   و   ها(6)=−6۔

ان امور کو خوب غور کر کے سمجھ لو۔

خاندان قبیل و اس کے بعض احکام

خاندانِ قبائل سے مراد قبائل کا قبیل ہے جیسے ب = {{1، 2}، {2، 3}، {2}}، تو ب خاندانِ قبائل ہے۔

و اس کی حد ہے ب = {ح | ∃س(س∈ح)}

و اس کے تمام افراد کے اتحاد کو ⋃(غ∈ب) غ سے تعبیر کرتے ہیں۔

و اس کی حد ہے ⋃(غ∈ب) غ = {ح | ∃غ(غ∈ب ∧ ح∈غ)}

تو ⋃(غ∈ب) غ = {1، 2، 3}

و تمام افراد کے اشتراک کو ⋂(غ∈ب) غ سے تعبیر کرتے ہیں۔

و اس کی حد ہے ⋂(غ∈ب) غ = {ح | ∀غ(غ∈ب ← ح∈غ)}

تو ⋂(غ∈ب) غ = {2}

خاندان کبھی **فہرست شدہ** ہوتا ہے یعنی وہ کسی فہرست کے ساتھ مقید ہوتا ہے، و **فہرست** بھی ایک قبیل ہوتی اس طور پہ کہ فہرست دالۂ تقابلی کا ساحہ ہوتی ہے و فہرست شدہ خادان اس کا حیطہ ہوتا ہے۔ یعنی قبیلِ فہرست کا ہر فرد خاندان کے ایک فرد سے متعلق ہوتا ہے۔ و یہاں ہم قبیلِ فہرست کو ⌜ست⌝ سے تعبیر کریں گے۔

فہرست شدہ خاندان کی مثال

ب = {غ ر | ر∈ست}

تو ⋃(ر∈ست) غ ر = {ح | ∃ر(ر∈ست ∧ ح∈غ ر)}

و ⋂(ر∈ست) غ ر = {ح | ∀ر(ر∈ست ← ح∈غ ر)}

تجزیۂ قبیل

اس سے مراد ہے کسی قبیل کے افراد سے ایسے غیر خالی مجموعات بنانا، جو اس قبیل کے خاص متساوی ہوں، اس طور پہ کہ کوئی بھی فرد ایک سے زیادہ مجموعہ میں نہ ہو لیکن کسی ایک میں ضرور ہو۔

لہذا قبیلِ ب کا **قبیلِ متجزّا** ظ ایسا خاندان ہے جس کے تمام افراد متباین و غیر خالی ہیں، و ب کا ہر فرد ان میں سے کسی ایک میں داخل ہے۔ و اس کی حد ہے۔

ب کا ظ = {ح | ح≠∅ ∧ ∀س(س∈ح ← س∈ب) ∧ ∀ص∈ظ(ح∩ص≠∅ ← ح=ص)}

خاتمہ

عدد طبیعی (عط) عدد کا وہ قبیل ہے جو 1 سے شروع ہو یعنی {1، 2، 3، ...}

و جو 0 سے شروع ہو وہ عدد تام (عت) ہے یعنی {0، 1، 2، 3، ...}

لیکن اس علم میں عددِ تام ہی کو عدد طبیعی کہا جاتا ہے۔

پھر 0 کو ∅ سے تعبیر کیا جاتا ہے و 1 کو {∅} سے، و اس کے علاوہ کے لیے

ح = ح−1 ∪ {ح−1} ہے۔

امثلہ

0 = ∅

1 = ∅ ∪ {∅} = {∅}

2 = {∅} ∪ {{∅}} = {∅، {∅}}

3 = {∅، {∅}} ∪ {{∅، {∅}}} = {∅، {∅}، {∅، {∅}}}

مزید توضیح

0

1 = {0}

2 = {0، 1} = {0، {0}}

3 = {0، 1، 2} = {0، {0}، {0، {0}}}

جب ہم نے اعداد طبیعی کو حاصل کرنے کا طریقہ معلوم کر لیا تو اب ہم کوئی بھی عددِ طبیعی حاصل کر سکتے ہیں و چونکہ عدد طبیعی کی معرفت اس کے افراد سے حاصل ہوتی ہے لہذا اس کی تعریف تعریف بالشمول ہوتی ہے یعنی

عت = {0، 1، 2، 3، ...}

عس = {ح\س | ح، س ∈ عت}

اس بحث سے معلوم ہوا کہ تمام اعداد قبیل ہیں مثلا 0 قبیلِ خالی ہے، 1 قبیل ہے جو قبیل خالی کو متضمن ہو، و ایسے ہی غیرہ نہایہ تک ہے۔ پھر عدد مکسور دو قبیل کے دریان تناسب ہے لہذا وہ بھی قبیل ہے، ایسے ہی عق یعنی عددی حقیقی ہے۔

و یہی وجہ ہے کہ علم قبیل کی مشہور انواع یعنی علم قبیل زرمیلو و علم قبیل نیومان میں کوئی فرد بھی غیر قبیل نہیں ہوتا۔ اسی کے ساتھ اس کتابچہ کو ہم یہیں ختم کرتے ہیں۔

تمام